

Interferenz-Winkelbedingung, Beugung und Abbildung

Helmut Nieke

Zusammenfassung

Die sog. Kohärenzbedingung beinhaltet eine geometrischen Beziehung, wo der Winkel zur (konventionellen) Lichtquelle kleiner sein muß als der zum Abstand der Beugungstreifen. Das Wirken einer Ordnung der Strahlung besteht hier nicht, daher wird die Bezeichnung Interferenz-Winkelbedingung vorgeschlagen. In Fraunhoferscher Beobachtungsart treten außerhalb der Brennebene auch innere Beugungstreifen des Spaltes auf. In der Entfernung der doppelten Brennweite entstehen bei paralleler Einstrahlung mit und ohne Optik die gleichen Beugungsfiguren des Spaltes mit inneren und äußeren Beugungstreifen, nur mit Optik auf dem Kopf stehend. Interferenz-Winkelbedingung und Abbesche Theorie ergänzen sich bei der Abbildung im Mikroskop.

Interference-Angle-Condition, Diffraction and Imagery

Abstract

The so called coherence-condition contains a geometrical relation, where the angle to (conventional) light-source has to be smaller than to interval of diffraction-fringes. Here an action of order of radiation does not exist, therefore the name interference-angle condition is offered. In Fraunhofer's manner of observation also inner diffraction-fringes of slit appears outside the focal-plane. At parallel incident light in distance of double focal length with and without optics the same diffraction figures with inner and outer fringes arise, only the figure is inverted with optics. Interference-angle condition and Abbe's theory of imagery complete one another in microscopic imagery.

1. Die sog. Kohärenzbedingung

Damit überhaupt Beugungserscheinungen oder Interferenzen sichtbar werden, muß

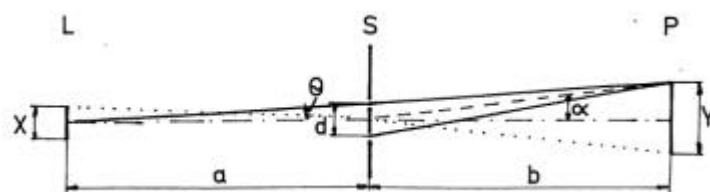


Abb. 1. Schematische Darstellung von Lichtquelle und Doppelspalt zur Ableitung der sog. Kohärenzbedingung. L - Lichtquelle der Ausdehnung X; S - Doppelspalt mit dem Spaltabstand d; P - Auffangfläche mit dem ersten Beugungsminimum vom Abstand Y; Θ - halber Öffnungswinkel; α - Beugungswinkel.

bekanntlich die sog. Kohärenzbedingung erfüllt sein. Zur Ableitung dieser Bedingung wird üblicherweise eine ausgedehnte Lichtquelle und ein Doppelspalt gezeichnet wie in Abb. 1. Dabei ist Θ der Winkel vom Beugungsspalt zur Lichtquelle, X die Größe dieser Lichtquelle (oder des Beleuchtungsspalt) und λ die sog. Wellenlänge. Die Kohärenzbedingung

lautet:

$$X \sin \Theta < \lambda / 2. \quad (1)$$

Verdet [1] ermittelte 1865 experimentell am Doppelspalt, daß die Lichtquelle (heute meist der Beleuchtungsspalt) nicht beliebig groß sein dürfen. Die Gleichung (1) interpretierte man nach der Wellenhypothese des Lichtes, daß die Strahlen von den Rändern der Lichtquelle höchstens die Phasendifferenz $\lambda / 2$ haben dürfen. Das setzt für die Strahlung der Lichtquelle in diesem Bereich eine beschränkte Phasendifferenz voraus.

Berge [2] betrachtete auch die rechte Seite der Abb. 1, also er berücksichtigte wirklich die Beugung. Für das erste Minimum der Beugungsfigur am Doppelspalt bei hinreichend großen Entfernungen ergibt sich mit α als Beugungswinkel, d als Abstand der Spalte des Doppelspaltes (für Spalt: Spaltweite = $2d$) und Y als Abstand des 1. Beugungsminimum in der Auffangfläche:

$$d \sin \alpha = \lambda / 2 \quad (2)$$

Daraus folgt mit (1):

$$X \sin \Theta < d \sin \alpha \quad (= \lambda/2) \quad (3)$$

Für kleine Winkel kann man setzen:

$$\begin{aligned} X d / 2 a < Y d / 2 b, \text{ also} & \quad (= \lambda/2) \\ X / a < Y / b & \quad (= \lambda/d) \end{aligned} \quad (4)$$

Die Formel (4) lautet in Worten: Der Winkel infolge der Beugung muß größer sein als der Winkel infolge der geometrischen Ausdehnung der Lichtquelle (punktierte Linie in Abb. 1). Der Winkel infolge der Ausdehnung der Lichtquelle überträgt sich also voll auf der Seite der Beugung und bewirkt dort eine Unschärfe der Beugungsfigur. Abb. 1 zeigt die Verhältnisse in der Fresnelschen Beobachtungsart, also ohne Optik. Da in der Fraunhoferschen Beobachtungsart die Lichtquelle in die Beobachtungsebene abgebildet wird, so folgt die Übertragung der Ausdehnung der Lichtquelle als Unschärfe der Beugungsfigur automatisch.

Ohne dies als Kohärenzbedingung zu bezeichnen, gab bereits Arkadiew [3] an, daß vom Beugungsschirm aus der Winkel zur Beleuchtung kleiner sein muß als der Winkel zum Abstand der Beugungsstreifen. Cittert [4], Zernicke [5] und Wawilow [6] stellten in anderem Zusammenhang fest, daß die Phase des einfallenden Lichtes keinen Einfluß auf die entstehenden Interferenzen hat.

Die Gleichung (4) ist eine rein geometrische Bedingung und gibt keinen Hinweis auf einen Ordnungszustand der Strahlung, der oft aus Gleichung (1) gefolgert wurde. Man könnte die Gleichung (4) als Interferenz-Winkelbedingung bezeichnen.

Zusammenfassend ist festzustellen, daß die zulässige Größe der konventionellen Lichtquelle eine geometrische Bedingung ist, die nur beschreibt ob Interferenzen überhaupt möglich sind. Aus den Gleichungen (3) und (4) fällt die Frequenz des Lichtes nur scheinbar heraus, dort wird nur monochromatisches Licht vorausgesetzt.

2. Diskussion der Interferenz-Winkelbedingung

Auch unserer heutigen Auffassung über Photonen aus spontaner Emission entspricht gar nicht der Annahme, daß Photonen einer ausgedehnten konventionellen Lichtquelle Phasenbedingungen zueinander haben sollen, denn jeder spontane Emissionsprozeß ist unabhängig von der Strahlung der Umgebung. Dann wurde bei kleinsten Intensitäten, wo nur ein Photon in der Apparatur sein konnte, die gleichen Beugungs- und Interferenzfiguren festgestellt, was z. B. Reynolds, Spartialian u. Scarl [7] referierten, und was nach Dirac [8] als Interferenz des Photons mit sich selbst interpretiert wird.

Dabei existieren natürlich nach stimulierter Emission Ordnungszustände der Strahlung und das kann als Kohärenz bezeichnet werden. Nach dem Vorschlag von Kapitza u. Dirac [9] konnte Schwarz [10] im Innern eines Lasers, mit einem Elektronenstrahl senkrecht zur Laserachse, Beugungsfiguren nachweisen. Danach wird der Laserstrahl als 'Lichtkristall' mit einer Gitterkonstante in Ausbreitungsrichtung gleich der sog. Wellenlänge bezeichnet.

Bei der stimulierten Emission spielt der Ordnungszustand eine Rolle. Magar u. Mandel [11] fanden, daß zwei Laser ohne Strahlungsteilung Interferenzen zeigen können, wenn sie hinreichend phasen- und modenstabilisiert waren. Richter, Brunner u. Paul [12] schlossen daraus, daß Photonen nicht nur mit sich selbst interferieren, wie dies Dirac [8] gefordert hatte, sondern auch mit anderen Photonen, wenn diese in Mode und Phase übereinstimmen. Damit kann man auch die große Interferenzlänge spezieller Laser begründen.

Die mit geometrischen Begrenzungen behafteten Erscheinungen der Beugung und Interferenz sind also nicht als Kohärenz zu bezeichnen, denn mit Ordnung der Strahlung hat das nichts zu tun. Von den Erscheinungen der wirklichen Ordnungszustände der Strahlung ist das abzutrennen und nicht gemeinsam als Kohärenz zu bezeichnen wie bei Glauber [13] oder Vinson [14].

Hier ist noch Nieke [15] zu zitieren, der dort nicht nur die Machschen Streifen der rotierenden Machschen Scheibe als physikalisches Phänomen bewies, sondern auch noch zeigte, daß der Machsche Streifen an der Grenze von Halbschatten bei Sonnenbestrahlung als Verletzung der Interferenz-Winkelbedingung auftritt, bei der nur noch das erste Maximum der Beugungsfigur der Halbebene übrig geblieben ist.

Schrödinger [16] stellte fest, daß mit einem elektrisch glühenden Wollastondraht von einigen μm Stärke noch bei einem Winkel von 6° zum Doppelspalt mit einer Sammellinse hinter dem Doppelspalt, Interferenzen auftraten. Die Interferenz-Winkelbedingung war für den dünnen Draht also erfüllt. Er zitierte Einstein [17], der einen gerichteten Emissionsakt forderte. Schrödinger [18] hat schon recht, wenn er schrieb: "Man hat wirklich den Eindruck, daß die Naturwissenschaft durch tief eingewurzelte Denkgewohnheiten gehemmt ist, deren einige schwer herauszufinden sind, während andere schon aufgedeckt wurden."

3. Beugung nach Fresnel und Fraunhofer

Fresnel [19] verwendete, wie schon vorher Newton [20] und Young, keine Optik zwischen Lichtquelle, Beugungsobjekt und Auffangebene. Bei der Beugung nach Fraunhofer [21] wird die Lichtquelle mit zusätzlichen Linsen oder Objektiven auf die Auffangfläche oder als Zwischenbild abgebildet. Durch die Abbildung der Lichtquelle wandern die Schattengrenzen des Spaltes in das

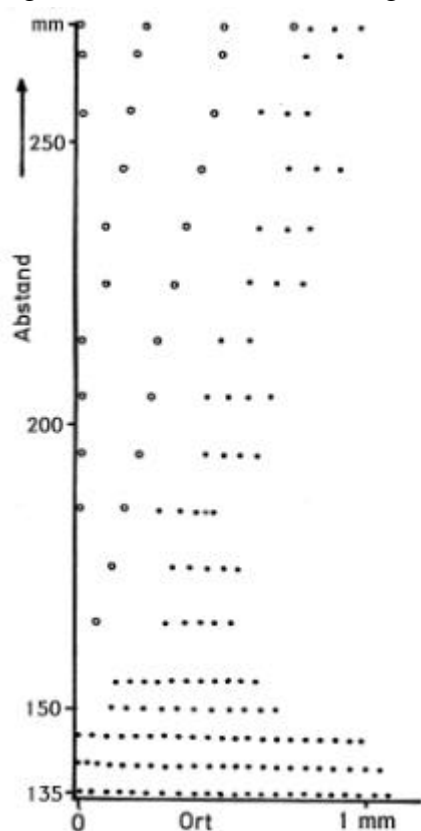


Bild der Lichtquelle und somit bleibt für die inneren (vgl. Nieke [22]) Beugungsstreifen kein Platz, denn die inneren Streifen waren ja durch die Lage innerhalb der Schattengrenzen definiert. So treten bei der Fraunhoferschen Beobachtungsart nur die äußeren Beugungsstreifen des Spaltes auf, allerdings verbreitert bei großem Bild der Lichtquelle bei Verletzung der Interferenz-Winkelbedingung. Ist dieses Bild größer als der Abstand der Beugungsstreifen, so ist die Beugungsfigur kaum auswertbar.

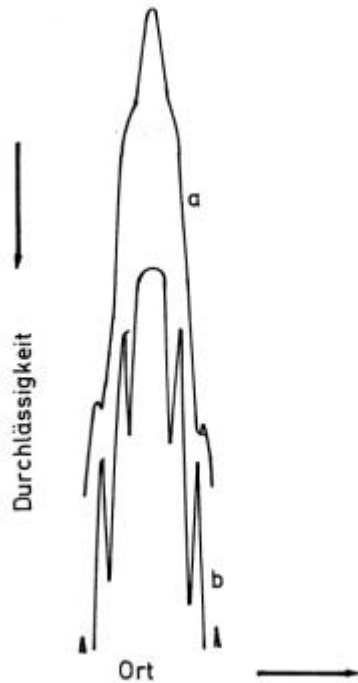
Abb. 2. Die Lage der Maxima innerer und äußerer Beugungsstreifen am Spalt zwischen einfacher und doppelter Brennweite, in Fraunhoferscher Beobachtungsart, $f' = 135\text{mm}$.

o - Maxima innerer Streifen, *-* - Maxima äußerer Streifen.

Das äußerste Auftreten innerer Beugungsstreifen markiert die Schattengrenze.

In der Abb. 2 werden die Lage der Maxima innerer und äußerer Beugungsstreifen zwischen der einfachen und doppelten Brennweite gezeigt. Ein He-Ne Laser wurde auf einen Beleuchtungsspalt $0,005\text{ mm}$ fokussiert. Im Abstand der Brennweite stand ein Tessar $1 : 4,5$, $f' = 135\text{ mm}$, dann folgte ein weiteres Tessar $1 : 4,5$, $f' = 135\text{ mm}$ bei dem an Stelle der Irisblende ein Spalt $1,5\text{ mm}$ eingebaut war. Diese Spaltweite wurde ausgewählt, damit sowohl äußere als auch innere Streifen leicht auswertbar waren. In der Brennebene entsteht die bekannte Beugungsfigur, aber bereits im Abstand 10% der Brennweite hinter der Brennebene spaltet die nullte Ordnung in

innere Streifen auf und die Abstände der höheren Ordnungen der äußeren Streifen werden etwas größer und in ihrer Anzahl geringer. Im Zwischengebiet wächst die Anzahl der inneren Streifen, die äußeren Streifen bleiben aber in reduzierter Anzahl bestehen. In der doppelten Brennweite sind die inneren Streifen gut ausgebildet, die äußeren Streifen haben etwa die doppelten Abstände wie in der einfachen Brennweite.



Es ist festzustellen, daß bei der Fraunhoferschen Beobachtungsart die inneren Beugungsstreifen nur in der Brennebene, also in der Bildebene der Lichtquelle verschwinden. Außerhalb der Brennebene sind innere Streifen wieder sichtbar.

Abb. 3. Photometerkurven von Beugungsfiguren mit 0,6 mm Spaltweite. Beleuchtungsspalt 0,001 mm, Tessar $f' = 135$ mm als Kollimator, a: ohne weitere Optik in 140 mm Entfernung, b: Objektiv $f' = 140$ mm.

4. Beugung und Abbildung

Für die Beugung mit Abbildung gibt es zwei Spezialfälle. In der Brennebene haben die Beugungsstreifen der Fraunhoferschen Beobachtungsart - es sind die äußeren - und die äußeren Beugungsstreifen in Fresnelscher Beobachtungsart die gleichen Abstände, aber nicht die gleichen Intensitäten wie Abb. 3 zeigt. Zusätzlich können natürlich bei der Fresnelschen Beobachtungsart noch innere Streifen auftreten, die es bei der Fraunhoferschen Beobachtungsart in der Brennebene nicht gibt.

Der zweite

Abb. 5 Wie Abb. 4.
a: Mit Tessar 1 : 4,5, $f' = 135$ mm in 270 mm Entfernung,
b: Objektiv entfernt, Beugungsfigur in 270 mm Entfernung.

Abb. 6. Wie Abb. 4.
a: Achromat 1 : 8, $f' = 320$ mm in 640 mm Entfernung,
b: Objektiv entfernt, Beugungsfigur in 640 mm Entfernung,

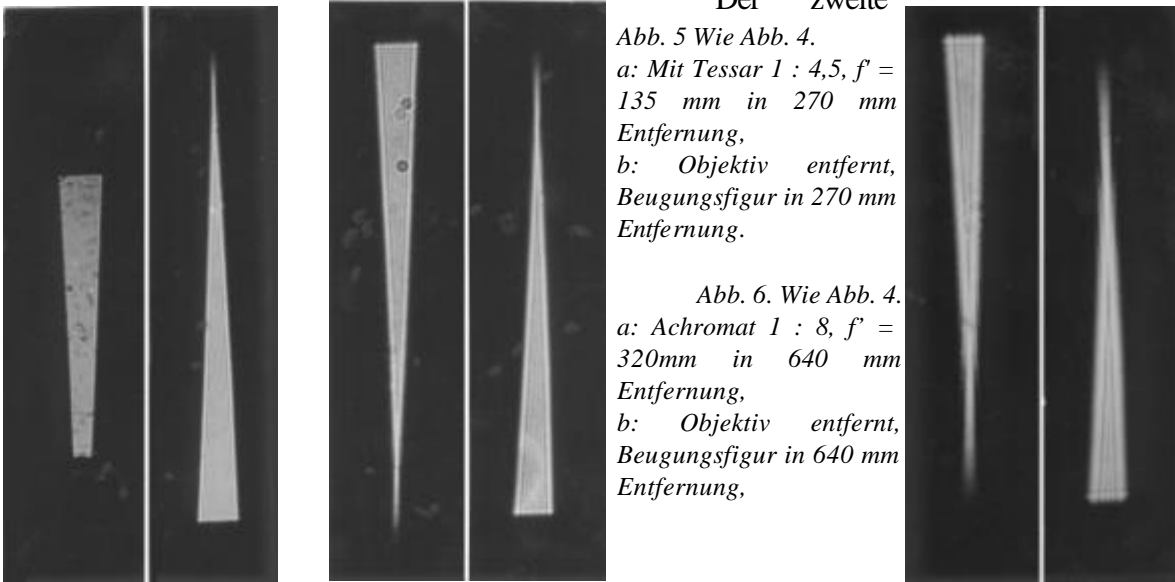


Abb. 4. Beugungsfigur in der doppelten Brennweite. Eine Hg-Höchstdrucklampe HBO 100 mit Grünfilter und Kondensator beleuchte eine Lochblende 0,1 mm, in 1 m Entfernung stand eine Linse $f' = 1$ m, dahinter ein Dreieckspalt 0.. .3 mm, der so parallel beleuchtet wurde. Dahinter :
a: Ein Tessar 1 : 2,8, $f' = 50$ mm, Beugungsfigur in 100 mm Entfernung,
b: Objektiv entfernt, Beugungsfigur in 100 mm Entfernung.

Spezialfall tritt ein bei der Beugungsfigur in der doppelten Brennweite. Beleuchtet man das Beugungsobjekt mit parallelem Licht und fängt die Beugungsfigur einmal ohne und zum anderen mit Optik auf, beide mal in der gleichen Entfernung (der doppelten Brennweite), so erhält man in beiden Fällen die gleiche Beugungsfigur mit inneren und äußeren Streifen, nur steht die mit Optik erhaltene Beugungsfigur der Abbildung wegen auf dem Kopf. Dies zeigen mit einem Dreieckspalt als Beugungsobjekt mit verschiedenen Brennweiten und somit Entfernungen die Abb. 4, 5 und 6.

5. Interferenz-Winkelbedingung und Abbesche Theorie der Abbildung

Die Interferenz-Winkelbedingung (4) verlangt, daß die Lichtquelle vom Beugungsobjekt unter einem kleineren Winkel erscheint als der Abstand der Beugungsstreifen. Die Abbesche Theorie der mikroskopischen Abbildung verlangt, daß außer dem nullten mindestens das erste Maximum der Beugungsfigur der Objektstruktur die Aperturblende des Objektivs passiert.

Die Bedingungen stimmen nicht überein, auch sind die Bezugsebenen nicht identisch. Aber gesichert ist, daß die Divergenz zur Lichtquelle bei der Beugung bildseitig übertragen wird, aber das wird hier erst wirksam, wenn wirklich die Beugung die Auflösung des Mikroskops begrenzt. Dann sollte die Apertur der Beleuchtung kleiner sein als die des Objektivs. Das heißt, die Beugung am Objekt soll nicht durch die Beugung an der Aperturblende verstärkt werden, denn Beugung findet nur in der engen Umgebung einer Kante statt. Das wurde bereits bei Nieke [23] (dort Abschnitt 7) erwähnt.

Seit Zernicke [25] das Phasenkontrastverfahren erfand, wurden Eingriffe in die Beugungsfigur in der Brennebene des Objektivs genutzt. Das wurde von ihm aber nicht mit einer Kohärenz erklärt, sondern mit Recht als eine Art Schlierenverfahren bezeichnet. Hingegen bezeichnete z. B. Yu [26] alle Eingriffe in Beugungsfiguren oder Objektbilder als Folge einer Teilkohärenz, was nach den vorhergehenden Abschnitten nicht immer berechtigt ist. Dabei stellte er geometrische oder frequenzmäßige Bedingungen nicht in Abrede, nur unterschied er nicht zwischen denen mit Ordnungszuständen. Bei Eingriffen in die Beugungsfiguren der Holographie ist ein Ordnungszustand der Strahlung zu erwarten und hier kann man auch von Kohärenz sprechen. Es ist dabei aber nach Pietsch u. Menzel [27] zu berücksichtigen, daß die Fourieroptik nur eine begrenzte Gültigkeit hat. Messerschmidt [28] fand bei Versuchen an Phasengitter auch negative Amplituden der Fourieranalyse und schloß daraus, daß die Fourieranalyse hier keinen physikalischen Sinn habe. Menzel, Miradé u. Weingärtner [29] schrieben: „....., daß erst Vereinfachungen der Beugungstheorie die Anwendung des Fouriertheorems erlauben.“

Der Grund für dieses Versagen ist leicht einzusehen: es wird nicht zwischen inneren und äußeren Beugungsstreifen unterschieden und nicht berücksichtigt, daß gebeugtes Licht nur aus der engen Umgebung der Kante kommt und nicht von der gesamten Fläche, wie das schon Newton [20] III Beobachtung 5 gezeigt hat.

6. Diskussion

Die Analogie zu Wasserwellen legte früher nahe, auch für Licht als Welle Ordnungszustände oder Phasenbeziehungen anzunehmen. Aber bereits Maxwell [30] betrachtete Licht als elektromagnetische Störung, er rechnete allerdings auch mit Wellen.

Mit Hilfe der Interferenz-Winkelbedingung konnte gezeigt werden, daß die Wellenanschauung der sog. Kohärenzbedingung dort eigentlich nie notwendig war, denn sie ist rein geometrisch interpretierbar.

Beim Thema Beugung und Abbildung ist zu berücksichtigen, daß innere und äußere Beugungsstreifen am Spalt unterschiedliche Entfernungsabhängigkeiten aufweisen. Allgemein ist bekannt, daß die Abstände äußerer Beugungsstreifen am Spalt linear mit der Entfernung wachsen,

die Photonen laufen also geradlinig. Anders die Abstände innere Beugungsstreifen des Spaltes oder die Beugungsstreifen der Halbebene. Hier fand Fresnel [19] experimentell ein anderes Verhalten. Es genügt dazu die parallele Lichteinstrahlung zu beachten, wo die Abstände der Beugungsstreifen nur mit der Wurzel aus der Entfernung wachsen (genauer bei Nieke [24]). Newton [20] III Frage 3 schloß aus dem Übergang der inneren zu äußeren Beugungsstreifen am Dreieckspalt, daß sich die Lichtteilchen aalartig bewegen müßten. Nach Nieke [22], [23] und [24] ist das schattenseitig gebeugte Licht schattenseitig versetzt, also auch hier können die Photonen nicht geradlinig laufen, sondern in einer S-Kurve, denn von den Spaltbacken können sie nicht kommen. So ist sicher, daß Beugung und Abbildung nicht einheitlich zu beschreiben sind, sondern für innere und äußere Streifen unterschiedlich. Im Abschnitt 5 wurden Spezialfälle betrachtet.

7. Anwendungen

Panarella [31] untersuchte die Nichtlinearitäten mit Photovervielfachern bei kleinsten Intensitäten. Dazu untersuchte er die Beugungsfigur einer sehr kleinen Kreisöffnung, deren Beugungsfigur er bei kleinsten Intensitäten verwaschen fand. Die Schwächung des Lichtes erreichte er aber mit Neutral-Dichtefiltern, die so im Strahlengang angebracht waren, daß sie die Interferenz-Winkelbedingung durch Streuung an diesen Scheiben vermindern konnten, worauf die verwaschenen Beugungsfiguren bei kleinsten Intensitäten hinweisen könnten. Jeffers, Wadlinger u. Hunter [32] bestätigten das Ergebnis von Panarella auch mit sehr engem Spalt statt Kreisblende, sie benutzten aber die gleiche Apparatur mit Schwächung durch Neutral-Dichtefilter. Deshalb müßte auch hier nachgewiesen werden, daß dies kein Effekt der Interferenz-Winkelbedingung war.

Literaturverzeichnis

- [1] M. E. Verdet, Ann. Sci. L'École Norm. Super. (Paris) **2** (1865) 291.
- [2] E. Berge, Math. naturwiss. Unterricht **27** (1974) 326.
- [3] W. Arkadiew, Phys. Z **14** (1913) 832.
- [4] P. H. Cittert, Physica **1** (1934) 201.
- [5] F. Zernicke, Physica **5** (1938) 785.
- [6] S. I. Wawilow, Die Mikrostruktur des Lichtes. Akademie-Verlag, Berlin 1954, S. 62, 76 u. 84.
- [7] G. T. Reynolds, K. Spartalian u. D. E. Scarl, Nuovo chim. **61** B (1969) 355.
- [8] P. A. M. Dirac, Die Prinzipien der Quantenmechanik. Hirzel, Leipzig 1930.
The Principles of Quantum Mechanics. Clarendon Press Oxford 1935, 1947, 1958.
- [9] P. L. Kapitza u. P. A. M. Dirac, Proc. Cambridge Phil. Soc. **28** (1933) 297.
- [10] H. Schwarz, Z. Phys. **204** (1967) 276; Phys. Bl. **26** (1970) 436.
- [11] G. Magyar u. L. Mandel, Nature **198** (1963) 255.
- [12] G. Richter, W. Brunner u. H. Paul, Ann. Physik (7) **14** (1964) 239.
- [13] R. J. Glauber, Phys. Rev. **130** (1963) 2529; **131** (1963) 2766.
- [14] J. F. Vinson, Optische Kohärenz. WIB 85, Akademie-Verlag Berlin, Pergamon Press, Oxford, Vieweg Braunschweig 1971.
- [15] H. Nieke, Exp. Techn. Physik **31** (1983) 53.
- [16] E. Schrödinger, Ann. Physik (IV) **61** (1920) 69.
- [17] A. Einstein, Phys. Z. **18** (1917) 121.
- [18] E. Schrödinger, Nature and the Greeks. Univ. Press Cambridge 1954;
Die Natur und die Griechen. Rowohlt Nr. 28, Hamburg 1956, S. 35.
- [19] A. J. Fresnel, Oeuvre Complètes I. Paris 1866;
Abhandlungen über die Beugung des Lichtes. Ostwalds Klassiker Nr. 215, Engelmann, Leipzig 1926.
- [20] I. Newton, Opticks, or a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light. London 1704.
Opera quae extant omnis, Tom IV, London 1782;
Optik II +III. Übers. W. Abendroth, Ostwald's Klassiker Nr. 97. Engelmann, Leipzig 1898;
Neuaufgabe Bd 96/97, Vieweg, Braunschweig 1983;
Optique, Trac..J. P. Marat 1787; Bourgois, Paris 1989
- [21] J. v. Fraunhofer, Gesammelte Schriften. Verl. bayr. Akad. München 1988.

- [22] H. Nieke, Newton's Beugungsexperimente und ihre Weiterführung. Arbeit 1.
- [23] Wie [22] Arbeit 2.
- [24] Wie [22], Arbeit 3.
- [25] F. Zernicke, *Physica* **9** (1942) 686.
- [26] F. T. S. Yu, in Ed. F. Wolf: *Progress in Optics XXIII* (1986) 222.
- [27] K. Pietsch u. E. Menzel, *Optik* **12** (1955) 203.
- [28] W. Messerschmidt, *Optik* **12** (1955) 297.
- [29] E. Menzel u. W. Miradé u., I. Weinberger, *Fourieroptik und Holographie*. Springer, Wien u. New York 1973, Zitat im Vorwort.
- [30] J. C. Maxwell, *The scientific papers*. Cambridge 1890;
Hrsg. L. Boltzmann, *Über physikalische Kraftlinien*. Ostwalds Klassiker Nr. 102, Engelmann, Leipzig 1898.
- [31] E. Panarella, *Speculations Sci. Techn.* **8** (1985) 35.
- [32] S. Jeffers, R. Wadlinger a. G. Hunter, *Can. J. Phys.* **69** (1991) 1471.